

Matemática Atuarial II

Aula 15

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Créditos: Leonardo Henrique Costa; leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

<https://www.portahalley.org/materiais.html#notas>



➤ Notas de aula da disciplina Matemática Atuarial II, oferecida pelo curso de Bacharelado em Ciências Atuariais da Universidade Federal de Alfenas, Campus Varginha.

PIRES, M.D.; COSTA, L.H. Anuidades reversíveis. [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Curso de Ciências Atuariais, Instituto de Ciências Sociais Aplicadas, Varginha, 2025. Disponível em: <https://www.portahalley.org/materiais.html#notas>. Acesso em: 28 jun. 2026.

Anuidades reversíveis

- Anuidades reversíveis são anuidades cujos pagamentos são destinados a um beneficiário enquanto determinado status permanecer ativo, mas que somente se iniciam após a ocorrência de um evento previamente estabelecido, como a morte do participante.
- Pagamento de pensão após a morte do participante
- Os produtos atuariais que são revertidos para outras pessoas (ou outros status) tem uma notação própria...

Anuidades reversíveis

Considere um dotal puro reversível que paga benefício unitário no instante n a y , desde que y esteja vivo nessa data e x tenha falecido até o instante n .

Como calcular esse produto?

Anuidades reversíveis

- Considere um produto dotal puro com as seguintes características:
- Será pago a y um benefício igual a 1, caso x tenha morrido entre a data 0 e n . Como calcular o valor presente atuarial desse produto?

$$A_{x|y:\overline{n}|^1} = {}_n p_y v^n \times {}_n q_x$$

$$A_{x|y:\overline{n}|^1} = {}_n p_y v^n (1 - {}_n p_x)$$

$$A_{x|y:\overline{n}|^1} = {}_n p_y v^n - {}_n p_y {}_n p_x v^n$$

$$A_{x|y:\overline{n}|^1} = A_{y:\overline{n}|^1} - A_{x,y:\overline{n}|^1}$$

Anuidades reversíveis

- Pensemos no caso de uma anuidade que será paga à y enquanto viver. No entanto, o início dos pagamentos só ocorrerá quando x falecer

Se $[T_y] \leq [T_x]$, não há pagamento se y morrer antes de surgir o direito à reversão;

Se $[T_y] > [T_x]$, então o pagamento ocorrerá até o falecimento de y

Anuidades reversíveis

Pensemos no caso de uma anuidade que será paga à y enquanto viver. No entanto, o início dos pagamentos só ocorrerá quando x falecer

Se $[T_y] \leq [T_x]$, não há pagamento a y

Se $[T_y] > [T_x]$, então o pagamento ocorrerá até o falecimento de y

$$Z = \begin{cases} 0, & [T_y] \leq [T_x] \\ v^{[T_x]+1} + v^{[T_x]+2} + \dots + v^{[T_y]}, & [T_y] > [T_x] \end{cases}$$

Anuidades reversíveis

$$Z = \begin{cases} 0, & [T_y] \leq [T_x] \\ v^{[T_x]+1} + v^{[T_x]+2} + \dots + v^{[T_y]}, & [T_y] > [T_x] \end{cases}$$

De outra forma:

$$Z = \begin{cases} 0, & [T_y] \leq [T_x] \\ \left((1 + v + \dots + v^{[T_y]}) - (1 + v + \dots + v^{[T_x]}) \right), & [T_y] > [T_x] \end{cases}$$

Anuidades reversíveis

$$Z = \begin{cases} 0, & [T_y] \leq [T_x] \\ (1 + v + \dots + v^{[T_y]}) - (1 + v + \dots + v^{[T_x]}), & [T_y] > [T_x] \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} 0, & [T_y] \leq [T_x] \\ \ddot{a}_{\overline{[T_y]+1}|} - \ddot{a}_{\overline{[T_x]+1}|}, & [T_y] > [T_x] \end{cases}$$

Logo

$$Z = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{[T_y]+1}|} - \ddot{a}_{\overline{[T_y]+1}|}, & [T_y] \leq [T_x] \\ \ddot{a}_{\overline{[T_y]+1}|} - \ddot{a}_{\overline{[T_x]+1}|}, & [T_y] > [T_x] \end{cases}$$

Anuidades reversíveis

$$Z = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{[T_y]+1}|} - \ddot{a}_{\overline{[T_y]+1}|}, & [T_y] \leq [T_x] \\ \ddot{a}_{\overline{[T_y]+1}|} - \ddot{a}_{\overline{[T_x]+1}|}, & [T_y] > [T_x] \end{cases}$$

A variável aleatória pode ser descrita como uma diferença entre a série de pagamentos associada ao tempo de vida futuro de (y) e a série associada ao menor tempo de vida futuro entre (x) e (y) .

$$Z = \ddot{a}_{\overline{[T_y]+1}|} - \ddot{a}_{\overline{[T_{x,y}]+1}|}$$

Anuidades reversíveis

A partir do slide anterior é fácil notar também que

$$Z = \ddot{a}_{\overline{[T_y]+1}|} - \ddot{a}_{\overline{[T_{y,x}]+1}|}$$

Logo

$$E(Z) = \ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y}$$

Anuidades reversíveis

É fácil notar que

$$\ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y} = \ddot{a}_{\overline{x,y}} - \ddot{a}_x$$

A série de pagamentos relacionados a y , menos a série de pagamentos relacionada ao mínimo entre os tempos de vida de x e y . Ou a série de pagamentos do máximo entre x e y menos a série de x .

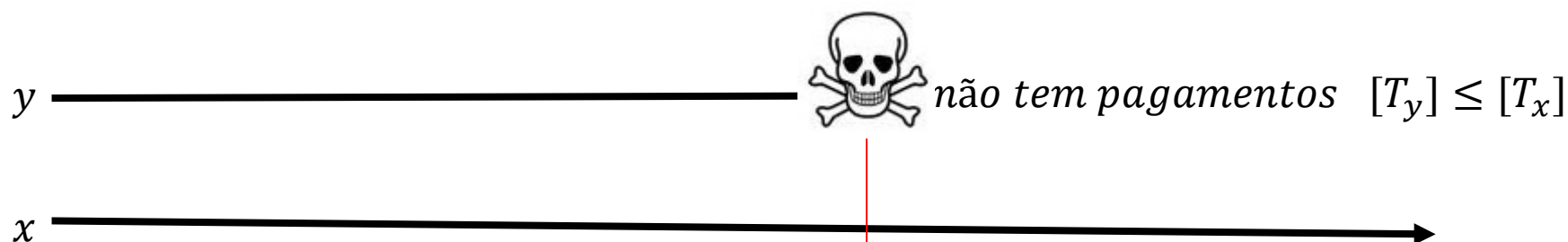
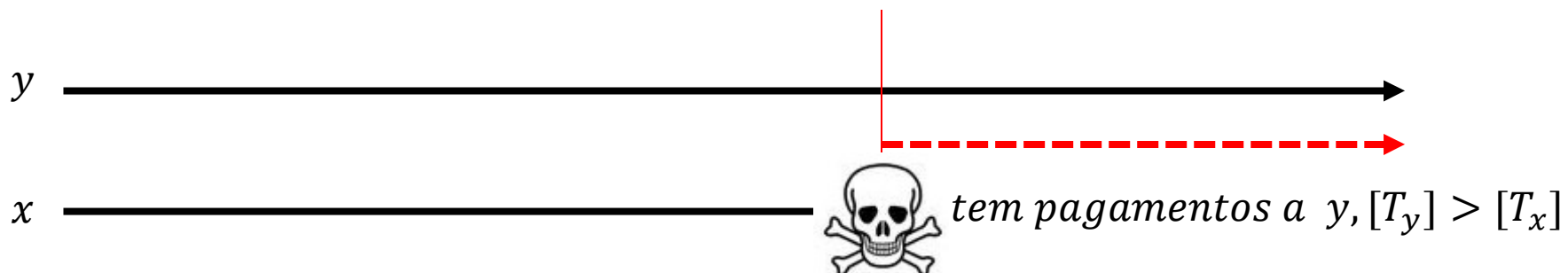
$$\ddot{a}_{x|y}$$

O PRIMEIRO TERMO INDICA A REGRA DE INÍCIO DA REVERSÃO (MORTE DE x POR EXEMPLO)

O SEGUNDO TERMO INDICA A REGRA DO FIM DA REVERSÃO, MORTE DE y POR EXEMPLO.

Anuidades reversíveis

$$\ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y}$$



$$\ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_{\overline{x},y} - \ddot{a}_x$$

Exemplo 1: Considere dois indivíduos com vidas independentes, um indivíduo tem $x = 107$ anos e o outro tem $y = 105$ anos. Pensemos no caso de uma anuidade que será paga à y enquanto viver. No entanto, o início dos pagamentos somente ocorrerá quando x falecer. Qual é o VPA para esse produto atuarial? Considere a tábua AT-49 e taxa de juros de 3% ao ano.

Exemplo 1: Considere dois indivíduos com vidas independentes, um indivíduo tem $x = 107$ anos e o outro tem $y = 105$ anos. Pensemos no caso de uma anuidade que será paga à y enquanto viver. No entanto, o início dos pagamentos só ocorrerá quando x falecer, qual o valor do VPA para esse produto atuarial? Considere a tábua AT-49 e taxa de juros de 3 % ao ano.

$$\ddot{a}_{107|105}$$

O PRIMEIRO TERMO INDICA A REGRA DE INÍCIO DA REVERSÃO (MORTE DE x POR EXEMPLO)

O SEGUNDO TERMO INDICA A REGRA DO FIM DA REVERSÃO, MORTE DE y POR EXEMPLO.

$$\ddot{a}_{107|105} = \ddot{a}_{105} - \ddot{a}_{105,107}$$

$$\ddot{a}_{107|105} = \left(\sum_{t=0}^4 {}_t p_{105} v^t \right) - \left(\sum_{t=0}^2 {}_t p_{105} {}_t p_{10} v^t \right) \approx 0,3903$$

Anuidades reversíveis

Pensemos no caso em que a regra de início da reversão seja generalizada para u (não necessariamente a morte de x) e a regra do término da reversão seja dada por v (não necessariamente a morte de y). Assim:

$$\ddot{a}_{u|v} = \ddot{a}_v - \ddot{a}_{u,v}$$

Por exemplo:

u significa que o início da reversão se dá com a morte de x ou se passarem n anos, o que ocorrer primeiro

v significa que somente a morte do beneficiário y dá fim a reversão...

Anuidades reversíveis

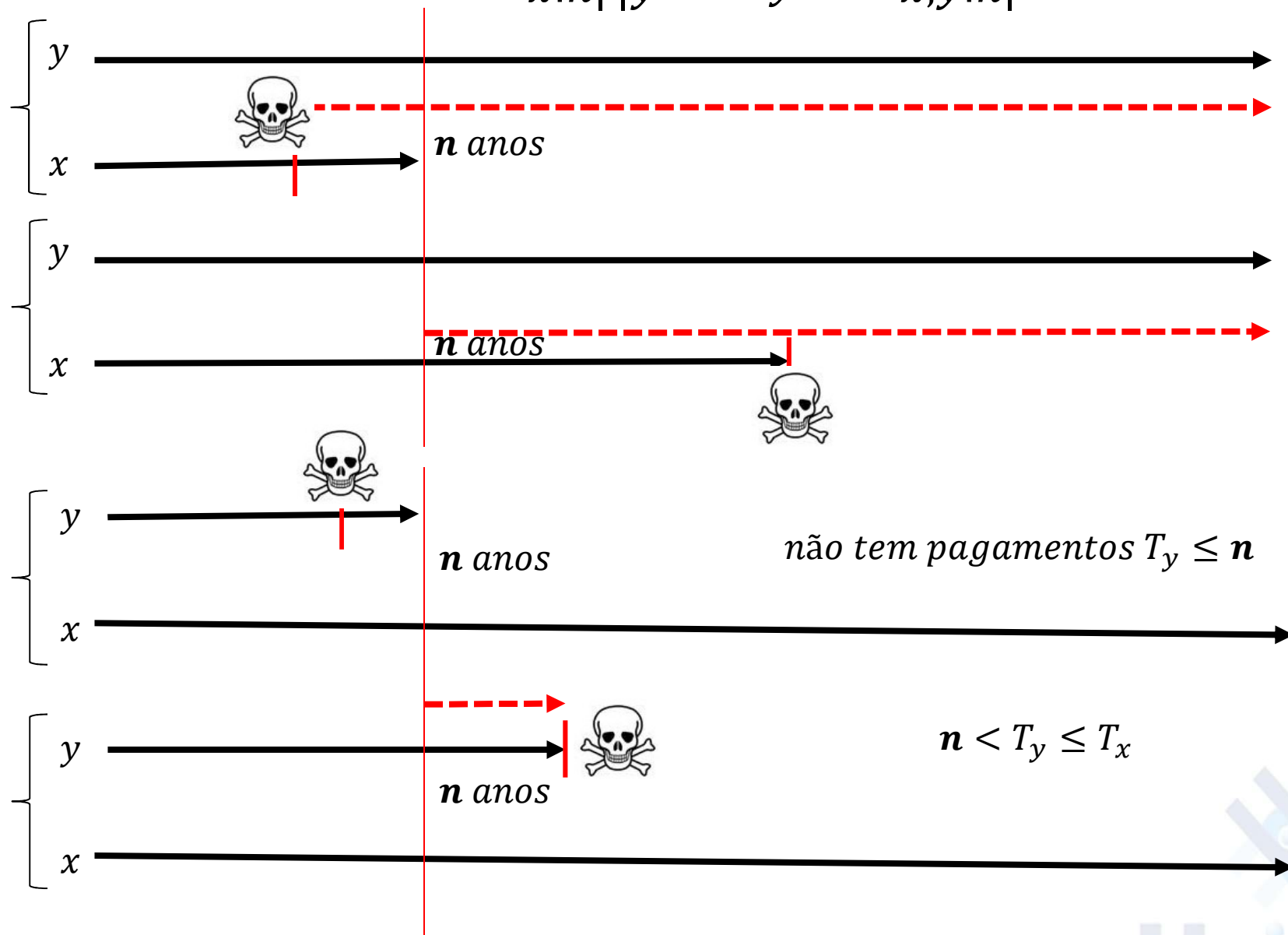
$$\ddot{a}_{u|v} = \ddot{a}_v - \ddot{a}_{u,v}$$

u significa que o início da reversão se dá com a morte de x ou se forem completados n anos, o que ocorrer primeiro

v significa que somente a morte do beneficiário y dá fim a reversão, então:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y:\overline{n}|}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y:\overline{n}|}$$



Exemplo 2: Considere dois indivíduos com vidas independentes, um indivíduo tem $x = 65$ anos e o outro tem $y = 25$ anos. Pensemos no caso de uma anuidade que será paga à y enquanto viver. No entanto, o início dos pagamentos só ocorrerá quando x falecer **ou** se passarem **30** anos. Qual o valor do prêmio puro único para esse produto atuarial?

Exemplo 2: Considere dois indivíduos com vidas independentes, um indivíduo tem $x = 65$ anos e o outro tem $y = 25$ anos. Pensemos no caso de uma anuidade que será paga à y enquanto viver. No entanto, o início dos pagamentos só ocorrerá quando x falecer ou se passarem 30 anos. Qual o valor do prêmio puro único para esse produto atuarial?

$$\begin{aligned} u &= x:\overline{n}| \\ v &= y \end{aligned}$$

- u significa que o início da reversão se dá com a morte de x ou se passarem n anos, o que ocorrer primeiro
- v significa que somente a morte do beneficiário y dá fim a reversão

$$\ddot{a}_{65:\overline{30}| \mid 25} = \ddot{a}_{25} - \ddot{a}_{65,25:\overline{30}|}$$

$$\ddot{a}_{65:\overline{30}| \mid 25} = \left(\sum_{t=0}^{84} {}_t p_{25} v^t \right) - \left(\sum_{t=0}^{29} {}_t p_{65} {}_t p_{25} v^t \right)$$

Exemplo 3: Pensemos agora no caso em que (y) receberá uma pensão temporária de n anos mas essa anuidade **será paga somente quando (x) falecer**. Quanto deve ser pago hoje como prêmio puro único?

Exemplo 3: Considere uma anuidade temporária cujo prazo termina em n anos a partir da emissão. Os pagamentos são feitos a y somente após a morte de x , enquanto y estiver vivo. Quanto deve ser pago hoje como prêmio puro único?

$$\begin{aligned} u &= x \\ v &= y:\overline{n}| \end{aligned}$$

$$\ddot{a}_{x|y:\overline{n}|} = \ddot{a}_{y:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x,y:\overline{n}|}$$

- u significa que somente a morte de x dá início a reversão
- v significa que a reversão pode ser encerrada com o falecimento de y ou decorridos n anos

$$\ddot{a}_{x|y:\overline{n}|} = \left(\sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_y v^t \right) - \left(\sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_x {}_t p_y v^t \right)$$

Anuidades reversíveis

$$\ddot{a}_{u|v} = \ddot{a}_v - \ddot{a}_{u,v}$$

u significa que o início da reversão

v representa a condição do término da reversão

$$\ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y}$$

$$a_{x|y} = a_y - a_{x,y}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y:\overline{n}|}$$

$$a_{x:\overline{n}|y} = a_y - a_{x,y:\overline{n}|}$$

$$\ddot{a}_{x|y:\overline{n}|} = \ddot{a}_{y:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x,y:\overline{n}|}$$

$$a_{x|y:\overline{n}|} = a_{y:\overline{n}|} - a_{x,y:\overline{n}|}$$

$$\bar{a}_{x|y} = \bar{a}_y - \bar{a}_{x,y}$$

Anuidades reversíveis

Considere uma renda vitalícia paga enquanto y e z estiverem vivos. A partir da morte de x (final do período), assim temos:

u : regra para iniciar a reversão (morte de x) e condição de y e z estarem vivos

v : regra para finalizar a reversão (primeira morte entre y e z)

$$\ddot{a}_{u|v} = \ddot{a}_v - \ddot{a}_{u,v}$$

...

$$a_{x|y,z} = a_{y,z} - a_{x,y,z}$$

Anuidades reversíveis

Considere uma renda vitalícia paga a y ou z a partir da morte de x (final do período), assim temos:

u : regra para iniciar a reversão (morte de x) e condição de y *ou* z estarem vivos

v : regra para finalizar a reversão (última morte entre y e z)

$$\ddot{a}_{u|v} = \ddot{a}_v - \ddot{a}_{u,v}$$

...

$$a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} - a_{\overline{n}|i}$$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV, 2022.

